CONTRAZIONI IN SPAZI METRICI

LEZIONE 1

Contrazioni

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $\varphi : X \to X$ si chiama **contrazione** se esiste $c < 1$ tale che

$$(*) \qquad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c\, d(x,y) \qquad \forall x, y \in X$$

N.B. Una contrazione è una mappa lipschitziana con costante di Lipschitz < 1.

Es. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| < 1.$$

Allora φ è una contrazione (per il Teorema di Lagrange)

La funzione $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definita da

$$\varphi(x) = x + e^{-x}$$

soddisfa $\varphi'(x) = 1 - e^{-x} < 1 \quad \forall x \in [0, +\infty)$, ma non è una contrazione. Infatti, se lo fosse dovrebbe esistere $c < 1$ tale che

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq c\, |x| \qquad \forall x \in [0, +\infty).$$

Ma questo è impossibile, perché $\varphi(x) - \varphi(0) = x + e^{-x} - 1 \sim x$ per x tendente a $+\infty$.

Es. Sia $\mathscr{C}([0,1])$ dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ e consideriamo $\varphi : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$, definita da

$$\varphi(f)(x) := 1 + \int_0^1 e^{-xy}\, y\, f(y)\, dy \qquad \forall x \in [0,1].$$

È un esercizio non difficile mostrare che $\varphi(f)$ è effettivamente una funzione in $\mathscr{C}([0,1])$. Mostriamo che φ è una contrazione. Siano $f, g \in \mathscr{C}([0,1])$. Allora

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| &= \left| \int_0^1 e^{-xy}\, y\, (f(y) - g(y))\, dy \right| \\
&\leq \int_0^1 e^{-xy}\, y\, |f(y) - g(y)|\, dy \\
&\leq \int_0^1 e^{-xy}\, y \sup_{y \in [0,1]} |f(y) - g(y)|\, dy \\
&= \|f-g\|_\infty \int_0^1 e^{-xy}\, y\, dy \\
&\leq \|f-g\|_\infty \int_0^1 y\, dy \\
&\leq (1/2)\, \|f-g\|_\infty \qquad \forall x \in [0,1],
\end{aligned}$$

e quindi, prendendo l'estremo superiore rispetto a $x \in [0,1]$,

$$\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty \leq (1/2)\, \|f-g\|_\infty .$$

In conclusione, φ è una contrazione di $\mathscr{C}([0,1])$ e si può scegliere $c = 1/2$.

Punti fissi

Def. Sia $\varphi : X \to X$ (X insieme qualunque). Un punto $\bar{x} \in X$ si dice **punto fisso** per φ se $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$

Es. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. I punti fissi di φ sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico di φ e della bisettrice del I° e III° quadrante.

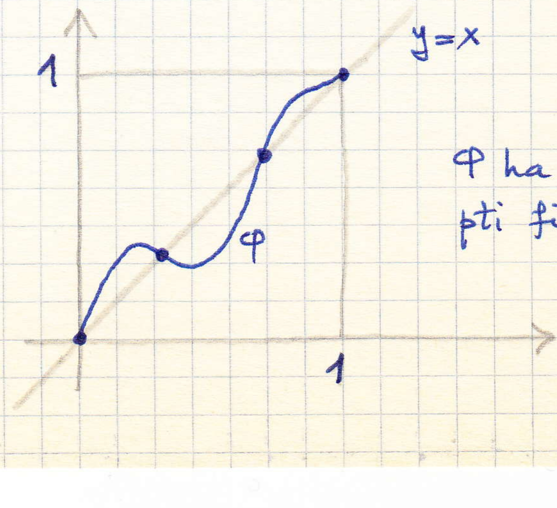
Teorema. Siano I un intervallo compatto (chiuso e limitato di $\mathbb{R}$) e $\varphi : I \to I$ una funzione continua. Allora φ ha almeno un punto fisso.

Dim. (nel caso $I = [0,1]$) Sia $\psi(x) := \varphi(x) - x$. Poiché $\varphi(0) \geq 0$ e $\varphi(1) \leq 1$ per ipotesi, abbiamo che $\psi(0) \geq 0$ e $\psi(1) \leq 0$. Se $\psi(0) = 0$ oppure $\psi(1) = 0$, allora non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora che

$$\psi(0) > 0 \quad \text{e} \quad \psi(1) < 0.$$

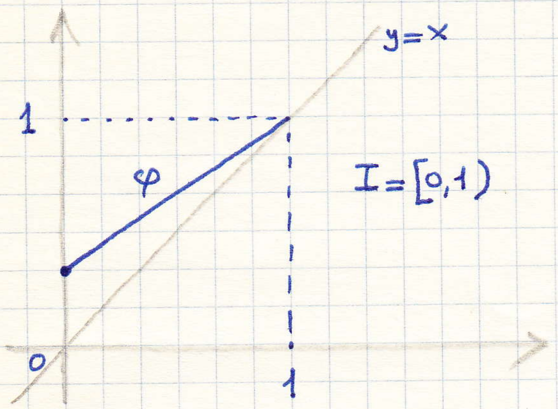
Poiché $\psi \in \mathscr{C}([0,1])$, per il Teorema degli zeri esiste $\bar{x} \in (0,1)$ tale che $\psi(\bar{x}) = 0$, cioè $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$. $\square$

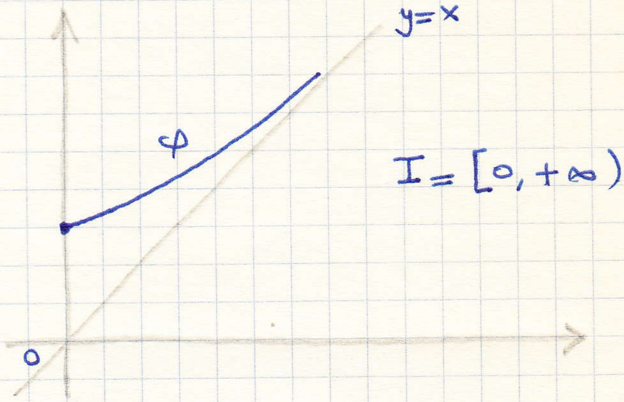
Oss. Nelle ipotesi del Teorema, l'unicità del p.to fisso non è assicurata



φ ha quattro pti fissi

Oss. Il risultato è falso se I non è chiuso oppure non è limitato





Contrazioni e punti fissi

Teorema (di Banach - Caccioppoli) Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $\varphi : X \to X$ una contrazione. Allora φ ha uno e un solo punto fisso.

Dim. Unicità. Siano $\bar{x}, \bar{y}$ punti fissi di φ. Allora

$$d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y})$$

D'altra parte, poiché φ è una contrazione, esiste $c < 1$ t.c.

$$d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) \leq c \; d(\bar{x}, \bar{y})$$

Si avrebbe quindi

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leq c \; d(\bar{x}, \bar{y}),$$

che implica $\bar{x} = \bar{y}$.

Esistenza. Sia x_0 un punto di X (scelto arbitrariamente).

Poniamo

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \dots,\ x_{n+1} = \varphi(x_n),\ \dots$$

Mostreremo che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Siano $n > m$.

Per la disuguaglianza triangolare

$$(*) \qquad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m)$$

Osserviamo che per ogni j

$$\begin{aligned}
d(x_j, x_{j-1}) &= d(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_{j-2})) \\
&\leq c\, d(x_{j-1}, x_{j-2}) \\
&= c\, d(\varphi(x_{j-2}), \varphi(x_{j-3})) \\
&\leq c^2 d(x_{j-2}, x_{j-3}) \\
&\ \vdots \\
&\leq c^{j-1} d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Utilizzando questa stima ripetutamente in $(*)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq (c^{n-1} + c^{n-2} + \dots + c^m)\, d(x_1, x_0) \\
&\leq \left(\sum_{j=m}^{+\infty} c^m\right) d(x_1, x_0) \\
&= \frac{c^m}{1-c}\, d(x_1, x_0) \\
&\to 0 \quad \text{per } n, m \to +\infty .
\end{aligned}$$

Quindi $\{x_n\}$ è di Cauchy. Poiché X è completo (per ipotesi), esiste $\overline{x} \in X$: $x_n \to \overline{x}$.

Mostriamo che $\bar{x}$ è il pto fisso cercato. Infatti

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)$$

$$(\varphi \text{ è cont.}) \quad = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1}$$

$$= \bar{x}$$

$\square$

N.B. Il procedimento dimostrativo precedente è costruttivo. Sia $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ data da $\varphi(x) = \cos x$: φ è una contrazione e per il teorema precedente ha un unico pto fisso. Per trovarne un'approssimazione, scegliamo un punto $x_0 \in [0,1]$ in modo arbitrario, p. es. $x_0 = 1/2$ e calcoliamo (con l'aiuto di una calcolatrice)

$$x_1 = \cos(1/2)$$
$$x_2 = \cos(\cos(1/2))$$
$$x_3 = \cos(\cos(\cos(1/2)))$$
$$\dots$$

Dopo qualche iterazione il numero che appare sullo schermo si stabilizzerà ...

Osserviamo che φ è Lipschitziana in $[0,1]$ con costante di Lipschitz $\sin 1$ $\left(= \sup_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)|\right)$. Possiamo stimare l'errore che commettiamo arrestando la procedura iterativa precedente dopo m passi. Dalla dimostra-

zione del Teorema di Banach–Caccioppoli abbiamo

$$d(\bar{x}, x_m) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_m)$$

$$\leq \frac{c^m}{1-c} d(x_1, x_0)$$

Nel caso in esame $d(x_1, x_0) \leq 1/2$ (perché $x_0 = 1/2$ e $x_1 \in [0,1]$) e quindi

$$d(\bar{x}, x_m) \leq \frac{(\sin 1)^m}{1-\sin 1} \frac{1}{2},$$

che converge rapidamente a 0.

<u>Oss.</u> L'ipotesi

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y) \qquad \forall x, y \in X$$

(unita alla completezza di X) non è sufficiente a garantire l'esistenza di un punto fisso di φ. Basta considerare $X = [0, +\infty)$, $\varphi(x) = x + e^{-x}$, esempio già discusso in precedenza.

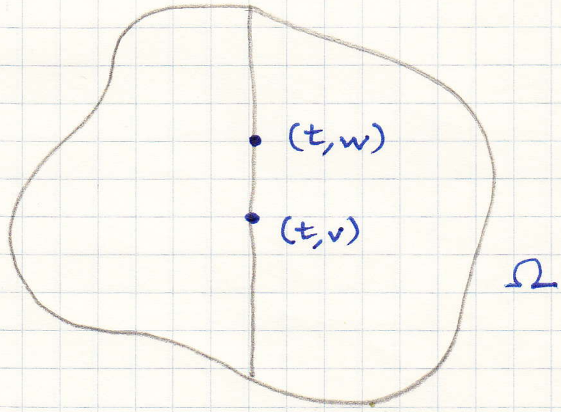
Applicazione: le equazioni integrali di Volterra

<u>Def.</u> Sia $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{\overset{\text{aperto}}{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è lipschitziana rispetto alla seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima se esiste una costante $L > 0$ t.c.

$$(*) \quad \left| f(t,v) - f(t,w) \right| \leq L\, |v-w| \qquad \forall\, (t,v), (t,w) \in \Omega$$

Diciamo che f è localmente lip. rispetto alla seconda variabile, unif.te rispetto alla prima se per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esistono un intorno Ω_0 e una costante $L_0 > 0$ t.c. $(*)$ vale per ogni $(t,v), (t,w) \in \Omega_0$

Se vale $(*)$, le funzioni $f(t,\cdot)$ sono lipschitziane con costante di Lipschitz L.



<u>N.B.</u> Se f verifica $(*)$ non è necessariamente continua in Ω. Ad es., siano $\Omega = \mathbb{R}^2$ e

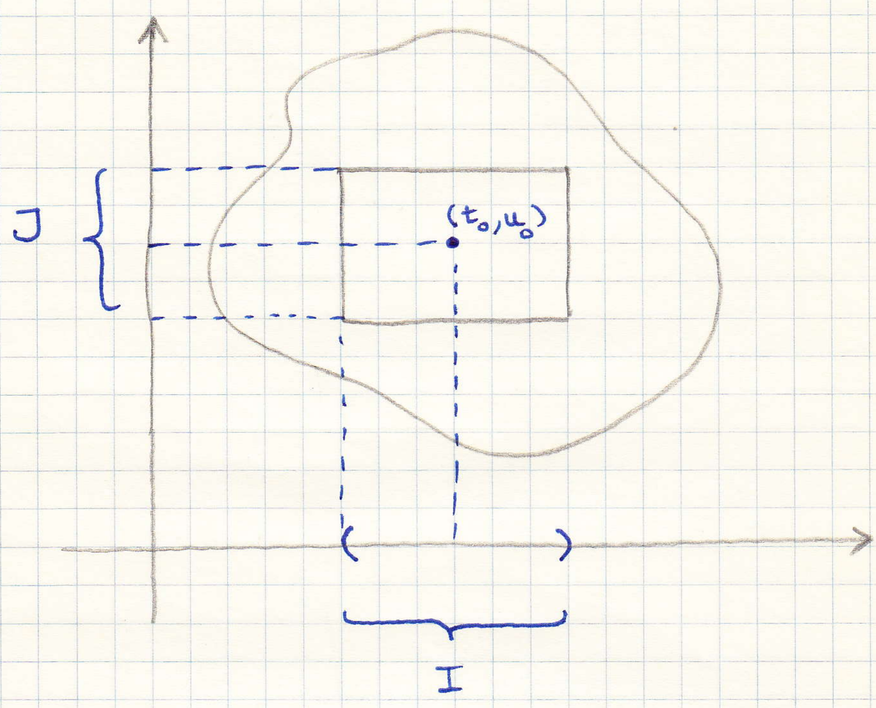
$$f(t,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$$

f è discontinua in ogni p.to di $\mathbb{R}^2$, e

$$f(t,v) - f(t,w) = 0 \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e f localmente lip. rispetto alla seconda variabile, unif.te rispetto alla prima.

Sia $(t_0, u_0) \in \Omega$ e siano $I = (t_0 - a, t_0 + a)$, $J = (u_0 - b, u_0 + b)$ tali che $\overline{I \times J} \subset \Omega$



Poniamo

$$M := \max_{\overline{I \times J}} |f|$$

e indichiamo con L una costante tale che

$$\left| f(t,v) - f(t,w) \right| \leq L \, |v - w| \qquad \forall t \in \overline{I}, \ \forall v, w \in \overline{J}.$$

Sia X il sottoinsieme di $\mathcal{C}(\overline{I}_0)$ definito come segue:

$$X := \{ u \in \mathcal{C}(\overline{I}_0) : \ \| u - u_0 \|_\infty \leq b \}$$

dove $I_0 = (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ e $r_0 < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\}$

Osserviamo che X è un sottoinsieme **chiuso** di $\mathscr{C}(\bar{I}_0)$.
[si tratta della sfera chiusa di centro u_0, pensata come funzione costante su $\bar{I}_0$, e raggio b].
Poiché $\mathscr{C}(\bar{I}_0)$ è completo, X è completo.

Consideriamo l'operatore T che ad ogni $u \in X$ associa la funzione

$$Tu(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad \forall t \in \bar{I}_0$$

Teorema Siano f, I, J, L, $\overset{(t_0-r_0,\, t_0+r_0)}{\overset{\parallel}{I_0}}$, M, X come sopra.
Se $r_0 < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$, allora T è una contrazione di X in sè.

Dim. Ovviamente se $u \in \mathscr{C}(\bar{I}_0)$, allora $Tu \in \mathscr{C}(\bar{I}_0)$.
Abbiamo per ogni $u \in X$

$$\begin{aligned} |Tu(t) - u_0| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,u(s))|\, ds \right| \\ &\leq M\,|t - t_0| \\ &\leq M\, r_0 \\ &< b \end{aligned}$$

Quindi $Tu \in X$.
Mostriamo che T è una contrazione di X. Siano $u, v \in X$. Allora

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\, ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |u(s)-v(s)|\, ds \right|$$

$$\leq L \, \|u-v\|_\infty \, |t-t_0|$$

$$\leq L r_0 \, \|u-v\|_\infty .$$

Poiché $L r_0 < 1$ per ipotesi, T è una contrazione. $\square$

Per il Teorema delle contrazioni T ha un unico pto fisso: esiste cioè un'unica funzione $v \in X$ t.c.

$$Tv = v,$$

equivalentemente t.c.

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds \qquad \forall t \in \overline{I}_0 .$$

In altre parole v è l'unica soluzione dell'eq. di Volterra

$$x(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \qquad \forall t \in \overline{I}_0 .$$

Ricordando la dim. del Teorema delle contrazioni, possiamo costruire una successione di funzioni $\{v_n\} \subset X$ tale che $\lim_{n \to +\infty} \| v_n - v \|_\infty = 0$. Ad esempio, poniamo

$$v_0 = u_0$$

$$v_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0)\, ds \;=\; T v_0(t)$$

$$v_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v_1(s))\, ds = T v_1(t)$$

$\dots$

Es. Siano $f(t,v) = v+t-1$, $(t_0, u_0) = (0,1)$. La successione $\{v_n\}$ è allora la seguente

$$v_0 = 1$$

$$v_1(t) = 1 + \int_0^t s\,ds = 1 + \frac{t^2}{2}$$

$$v_2(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2} + s - 1\right) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$v_n(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

Chiaramente $v_n(t) \to e^t - t$ per $n \to +\infty$.

In questo esempio possiamo scegliere liberamente $a, b > 0$

La convergenza di v_n a $e^t - t$ è uniforme su ogni compatto di $\mathbb{R}$.